

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรื่อง สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม (1)

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^k = k \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมได้
2. นักเรียนสามารถนำสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าของจำนวนใด ๆ

สาระการเรียนรู้

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a M^k = k \log_a M$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a 1 = 0$
4. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$

สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนที่กำหนดให้ได้

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูแนะนำการหาค่าลอการิทึม โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ทำได้ดังนี้

1.1 กดปุ่ม \log_{\square}

$$\log_{\square}(\square)$$

1.2 ครูให้นักเรียนหาค่า $\log_5 25$

โดยกด $\boxed{5} \boxed{\rightarrow} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{=}$

$$\log_5(25)$$

1.3 ครูให้นักเรียนหาค่า $\log_8 4$

โดยกด $\boxed{\log_{\square}} \boxed{8} \boxed{\rightarrow} \boxed{4} \boxed{=}$

$$\log_8(4)$$

2. ครูทบทวนการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมโดยการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย เช่น จงหาค่าของ

1) $\log_5 25$

วิธีทำ	ให้	$x = \log_5 25$
	จะได้	$5^x = 25$
	ดังนั้น	$5^x = 5^2$
	ดังนั้น	$x = 2$

ตอบ $\log_5 25 = 2$

2) $\log_8 4$

วิธีทำ	ให้	$x = \log_8 4$
	จะได้	$8^x = 4$
	ดังนั้น	$(2^3)^x = 2^2$
	ดังนั้น	$2^{3x} = 2^2$
	ดังนั้น	$3x = 2$
	จะได้ว่า	$x = \frac{2}{3}$

ตอบ $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

3. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 2 – 3 คน โดยความสามารถให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรมที่ 11 โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่าของแต่ละข้อแล้วบันทึกค่าที่ได้ลงในตารางใบกิจกรรมที่ 11 สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม (ขั้นการสำรวจ)

4. ครูให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์จากใบกิจกรรมที่ 11 ในแต่ละข้อว่า มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ครูอาจใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย เพื่อให้นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ ดังนี้ (ขั้นการหาความสัมพันธ์)

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1. \log_a a = 1$$

$$2. \log_a 1 = 0$$

$$3. \log_a M^k = k \log_a M$$

$$4. \log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M \text{ เมื่อ } k \neq 0$$

5. ครูและนักเรียนร่วมกันพิสูจน์ข้อสรุปนั้น เพื่อแสดงให้นักเรียนได้เห็นว่าข้อสรุปหรือสมบัติของลอการิทึม ดังกล่าวเป็นจริงตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ (ขั้นการสรุปความสัมพันธ์)

ข้อที่ 1 $\log_a a = 1$

พิสูจน์	ให้	$\log_a a = x$
	จะได้	$a^x = a$
		$x = 1$
	ดังนั้น	$\log_a a = 1$

ข้อที่ 2 $\log_a 1 = 0$

พิสูจน์	ให้	$\log_a 1 = x$
	จะได้	$a^x = 1$
		$x = 0$
	ดังนั้น	$\log_a 1 = 0$

ข้อที่ 3 $\log_a M^k = k \log_a M$

พิสูจน์	ให้	$\log_a M = x$
	จะได้	$a^x = M$
		$(a^x)^k = M^k$
		$a^{xk} = M^k$
	ดังนั้น	$\log_a M^k = kx$
		$\log_a M^k = k \log_a M$

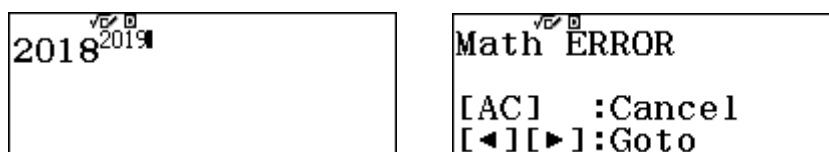
ข้อที่ 4 $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$

พิสูจน์	ให้	$\log_a M = x$
	จะได้	$a^x = M$
		$(a^x)^{\frac{k}{k}} = M^{\frac{k}{k}}$

$$\begin{aligned} (a^k)^{\frac{x}{k}} &= M \\ \text{ดังนั้น } \log_{a^k} M &= \left(\frac{1}{k}\right)x \\ \log_{a^k} M &= \frac{1}{k} \log_a M \end{aligned}$$

(ครูอาจจะเลือกการพิสูจน์ให้ดูในบางข้อ)

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 11 เป็นการบ้าน (ขั้นการฝึกทักษะ)
7. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบค่าของ 2018^{2019} กับ 2019^{2018} ว่าจำนวนใดมีค่ามากกว่ากัน โดยให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ในการตรวจสอบได้ โดยครูอาจจะให้นักเรียนทดลองกดเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณค่าของ 2018^{2019} ซึ่งเมื่อนักเรียนลองกดจะได้ผลลัพธ์ ดังนี้



8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงสาเหตุที่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์แสดงผลว่า Math ERROR เนื่องจากจำนวนดังกล่าวมีค่าเยอะมากเกินไป 100 หลัก เกินกว่าที่จะใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์คำนวณตรงๆ ได้ และร่วมกันอภิปรายว่าจะมีวิธีการเปรียบเทียบ 2018^{2019} กับ 2019^{2018} ได้อย่างไร
9. ครูอาจจะให้แนวคิดกับนักเรียนว่าใช้ความรู้เรื่องลอการิทึมโดยการ Take log (ฐานอะไรก็ได้ โดยถ้าฐานมากกว่า 1 จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้าฐานมากกว่า 0 แต่น้อยกว่า 1 จะเป็นฟังก์ชันลด) ในจำนวนที่ต้องการตรวจสอบเช่น

$$2018^{2019} \quad \text{Take log ฐาน 2018 ได้ } \log_{2018} 2018^{2019}$$

$$2019^{2018} \quad \text{Take log ฐาน 2018 ได้ } \log_{2018} 2019^{2018}$$

10. ให้นักเรียนลองกดเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อตรวจสอบ พบว่า ก็ยังไม่สามารถคำนวณได้



11. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าเหตุใดเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์จึงคำนวณไม่ได้ เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่าที่คำนวณไม่ได้เพราะเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์จะหาผลลัพธ์ของค่าที่อยู่หลัง log ก่อนซึ่งมีค่ามากจึงคำนวณไม่ได้
12. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าจะมีวิธีการคำนวณ $\log_{2018} 2018^{2019}$ โดยอาศัยสมบัติใดเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า

$$\begin{aligned} \log_{2018} 2018^{2019} &= 2019 \log_{2018} 2018 \\ &= 2019 \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2019 \\
 \log_{2018} 2019^{2018} &= 2018 \log_{2018} 2019 \\
 &= 2018 \times 1.000065102 \\
 &= 2018.131376
 \end{aligned}$$

$$2019 \log_{2018} (2018^{\wedge})$$

$$2019$$

$$2018 \log_{2018} (2019^{\wedge})$$

$$2018.131376$$

13. ครูอาจใช้คำถามว่า $f(x) = \log_{2018} x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด (เพิ่ม) เพื่อให้นักเรียนสรุปได้ว่า

เนื่องจาก $\log_{2018} 2018^{2019} > \log_{2018} 2019^{2018}$ และ $f(x) = \log_{2018} x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น $2018^{2019} > 2019^{2018}$

14. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ โดยสามารถใช้เครื่องคำนวณ
วิทยาศาสตร์ตรวจสอบได้ (ขั้นการแสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน)

14.1 $(\log_a x)^n = n \log_a x$ เป็นเท็จ เช่น

$$(\log_{10}(3))^2$$

$$0.2276446917$$

$$2 \log_{10}(3)$$

$$0.9542425094$$

14.2 $\log_a x^n = n \log_a x$ เป็นจริง เช่น

$$\log_{10}(3^2)$$

$$0.9542425094$$

$$2 \log_{10}(3)$$

$$0.9542425094$$

14.3 $\log_1 1 = 1$ เป็นเท็จ เนื่องจาก $\log_a x$ จะนิยามเมื่อ a เป็นจำนวนจริง
ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

$$\log_1(1)$$

$$\text{Math ERROR}$$

$$[\text{AC}] : \text{Cancel}$$

$$[\leftarrow] [\rightarrow] : \text{Goto}$$

14.4 $\log_{\frac{1}{5^3}} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$ เป็นเท็จ เนื่องจาก $\log_{\frac{1}{5^3}} 5 = \frac{1}{\frac{1}{3}} \log_5 5 = 3$

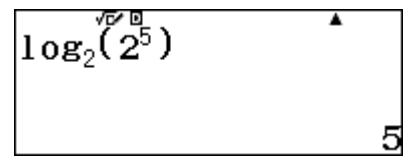
แสดงได้ ดังนี้

$$\log_{\frac{1}{5^3}}(5)$$

$$3$$

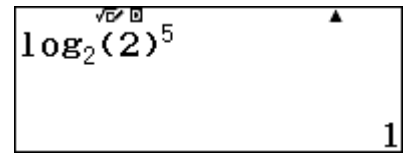
ข้อสังเกตในการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ รุ่น fx-991EX Classwiz ในการหาค่าลอการิทึม

- a. ถ้าต้องการหาค่าของ $\log_2 2^5$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 5
จะต้องใส่เลขยกกำลังและวงเล็บ ดังภาพขวามือ



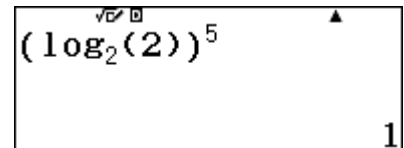
A calculator screen showing the input $\log_2(2^5)$. The result 5 is displayed at the bottom right.

- b. หากใส่เลขยกกำลังผิด ดังภาพขวามือ
จะได้คำตอบเป็น 1



A calculator screen showing the input $\log_2(2)^5$. The result 1 is displayed at the bottom right.

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $(\log_2 2)^5$



A calculator screen showing the input $(\log_2(2))^5$. The result 1 is displayed at the bottom right.

15.ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสมบัติที่สำคัญของลอการิทึม โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 11 สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม
2. แบบฝึกทักษะที่ 11
3. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 11
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 11
3. ประเมินจากการตอบคำถามในชั้นเรียน

ใบกิจกรรมที่ 11

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการหาคำตอบลงในตารางให้สมบูรณ์

ตารางที่ 1

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
1.1 $\log_7 7 = \dots\dots\dots$	1.2 $\log_{12} 12 = \dots\dots\dots$
1.3 $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \dots\dots\dots$	1.4 $\log_{\sqrt{20}} \sqrt{20} = \dots\dots\dots$
1.5 $\log_{0.8} 0.8 = \dots\dots\dots$	1.6 $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_a a = \dots\dots\dots$	

ตารางที่ 2

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
2.1 $\log_6 1 = \dots\dots\dots$	2.2 $\log_{12} 1 = \dots\dots\dots$
2.3 $\log_{\sqrt{2}} 1 = \dots\dots\dots$	2.4 $\log_{\sqrt{13}} 1 = \dots\dots\dots$
2.5 $\log_{\frac{9}{4}} 1 = \dots\dots\dots$	2.6 $\log_{\frac{2}{7}} 1 = \dots\dots\dots$
2.7 $\log_{2.5} 1 = \dots\dots\dots$	2.8 $\log_{6.8} 1 = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_a 1 = \dots\dots\dots$	

ตารางที่ 3

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
3.1 $\log_{0.5} 5^4 = \dots\dots\dots$	3.2 $4\log_{0.5} 5 = \dots\dots\dots$
3.3 $\log_2 3^{-8} = \dots\dots\dots$	3.4 $-8\log_2 3 = \dots\dots\dots$
3.5 $\log_7 4^5 = \dots\dots\dots$	3.6 $5\log_7 4 = \dots\dots\dots$
3.7 $\log_8 16^{10} = \dots\dots\dots$	3.8 $10\log_8 16 = \dots\dots\dots$
3.9 $\log_4 \sqrt{3}^7 = \dots\dots\dots$	3.10 $7\log_4 \sqrt{3} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_a M^k = \dots\dots\dots$	

ข้อที่ 4

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึม	
4.1 $\log_{3^8} 3 = \dots\dots\dots$	4.2 $\frac{1}{8}\log_3 3 = \dots\dots\dots$
4.3 $\log_{2.5^{-4}} 2.5 = \dots\dots\dots$	4.4 $-\frac{1}{4}\log_{2.5} 2.5 = \dots\dots\dots$
4.5 $\log_{5^{10}} 3 = \dots\dots\dots$	4.6 $\frac{1}{10}\log_5 3 = \dots\dots\dots$
4.7 $\log_{(\frac{3}{2})^6} \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$	4.8 $\frac{1}{6}\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$
ดังนั้น $\log_{a^k} M = \dots\dots\dots$	

แบบฝึกทักษะที่ 11

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนค่าของจำนวนต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

- | | |
|--|--|
| 1. $\log_3 3 = \dots\dots\dots$ | 2. $\log_{10} 10 = \dots\dots\dots$ |
| 3. $\log_5 5^4 = \dots\dots\dots$ | 4. $\log_{10} 10^3 = \dots\dots\dots$ |
| 5. $\log_3 1 = \dots\dots\dots$ | 6. $\log_8 1 = \dots\dots\dots$ |
| 7. $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right) = \dots\dots\dots$ | 8. $\log_2 1 + \log_2 2^3 = \dots\dots\dots$ |

ตอนที่ 2 เปรียบเทียบค่าของลอการิทึมต่อไปนี้ว่าข้อใดมีค่าเท่ากัน

- a. $\log_{10} 20^2$ b. $(\log_{10} 20)^2$ c. $2\log_{10} 20$

.....

.....

เปรียบเทียบค่าของลอการิทึมต่อไปนี้ว่าข้อใดมีค่าเท่ากัน

- a. $\log_3 \sqrt{4}$ b. $\frac{1}{2}\log_3 4$ c. $\sqrt{\log_3 4}$

.....

.....

ตอนที่ 3 หาค่าลอการิทึมต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\log_b 2 \approx 0.693$, $\log_b 3 \approx 1.099$ และ $\log_b 5 \approx 1.609$ (สามารถใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ในการตรวจคำตอบได้)

- | | |
|---------------|----------------|
| 1. $\log_b 4$ | 2. $\log_b 81$ |
| | |
| | |
| | |

3. $\log_b 25$

.....

.....

.....

4. $\log_{\frac{1}{b^4}} 2$

.....

.....

.....

จงหาของจำนวนต่อไปนี้โดยใช้สมบัติของลอการิทึม (ไม่ใช่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์)

1. $\log_2 \sqrt[3]{2}$

.....

.....

.....

2. $\log_{\frac{1}{3}} 9$

.....

.....

.....

3. $\log_{10} 100$

.....

.....

.....

4. $\log_{10} 0.1$

.....

.....

.....

5. $\log_{\sqrt{3}} 3^{12}$

.....

.....

.....

6. $\log_{\frac{1}{4}} 16$

.....

.....

.....